12. $y = f_a(x) = 10xe^{-ax^2}$

a) Definitionsbereich: Es gibt keinerlei Einschränkungen, also x∈R

Nullstelle: $0 = 10xe^{-ax^2}$ → Da $e^{-ax^2} \neq 0$ für alle x gilt, folgt 10x = 0 also $x_0 = 0$

Symmetrie: $f_a(-x) = 10(-x)e^{-a(-x)^2} = -10xe^{-ax^2} = -f_a(x)$ also symmetrisch zu (0 | 0)

Ableitungen: $f_a'(x) = 10e^{-ax^2} + 10xe^{-ax^2}(-2ax) = 10e^{-ax^2}(1-2ax^2)$

$$f_a''(x) = 10e^{-ax^2}(-2ax)(1-2ax^2) + 10e^{-ax^2}(-4ax) = 10e^{-ax^2}(-2ax + 4a^2x^3 - 4ax)$$

$$f_a''(x) = 10e^{-ax^2}(4a^2x^3 - 6ax) = 20axe^{-ax^2}(2ax^2 - 3)$$

3. Ableitung wird nicht benötigt!

Extrema: $f_a'(x) = 0$ → $10e^{-ax^2}(1-2ax^2) = 0$

wegen $e^{-ax^2} \neq 0$ für alle x folgt $1 - 2ax^2 = 0$ → $x^2 = \frac{1}{2a}$

und somit $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2a}}$

$$f_a''\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = 20a\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2}\left(2a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2 - 3\right) = \frac{20a}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{a}{2a}}\left(\frac{2a}{2a} - 3\right)$$

$$f_a''\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = -\frac{20a}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}} < 0$$ wegen a>0 → Maximum

Dasselbe mit der 2. Lösung $f_a''\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{20a}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}} > 0$ → Minimum

Und damit $H\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| \frac{10}{\sqrt{2ea}}\right)$ und $T\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| -\frac{10}{\sqrt{2ea}}\right)$

Wendepunkte: $f_a''(x) = 20axe^{-ax^2}(2ax^2 - 3) = 0$

Wegen $e^{-ax^2} \neq 0$ für alle x folgt $x_1 = 0$ und $2ax^2 - 3 = 0$

und damit als weitere Lösungen $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2a}}$ und $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2a}}$

Laut Aufgabenstellung Verzicht auf Überprüfung der hinreichenden Bedingung!

3 Wendepunkte $W_1(0|0)$ $W_2\left(\sqrt{\frac{3}{2a}} \middle| \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2ae^3}}\right)$ $W_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}} \middle| -\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2ae^3}}\right)$

Ermittlung von a: Die y-Koordinate des Maximums ist der größtmögliche Wert, den die Funktion annimmt!

Also folgt $5 = \frac{10}{\sqrt{2ea}}$ → $\sqrt{2ea} = 2$ → $a = \frac{2}{e}$

b) Da die Funktion symmetrisch zu (0 | 0) ist, muss die gesuchte Gerade eine Gleichung der Form $y = mx$ haben.

Da der Hochpunkt auf der Geraden liegt, gilt $\frac{10}{\sqrt{2ea}} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} \rightarrow m = \frac{10\sqrt{e}}{e}$

Die Geradengleichung lautet somit $y = \frac{10\sqrt{e}}{e} x$.

Der Punkt (0 | 0) liegt auch auf dieser Geraden, ist aber ein Wendepunkt!
Damit ist der zweite Teil der Aufgabe auch erledigt.

c) Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{2} x \cdot f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x^2}$

$A'(x) = 10xe^{-x^2} + 5x^2 e^{-x^2}(-2x) = 10e^{-x^2}(x - x^3)$

$A'(x) = 0 \rightarrow 10e^{-x^2}(x - x^3) = 0$ und wegen $e^{-x^2} \neq 0$ für alle x folgt

$x - x^3 = 0 \rightarrow x(1 - x^2) = 0$ und somit $x_1 = 0$ $x_2 = -1$ $x_3 = 1$

Die ersten 2 Lösungen entfallen wegen x > 0 laut Aufgabenstellung.
Also bleibt als einzige Lösung x = 1.

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann $A(1) = 5 \cdot e^{-1} \approx 1{,}84\,\text{FE}$