3.a) Parametergleichung für E_1: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow 2x - y + z = 4$

b) Wenn man davon ausgeht, dass die Beschriftung des Prismas so vorgenommen wird, dass über A der Punkt D liegt, dann muss man zeigen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$!

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 + 6 + 25 \neq 0$$

Ermittlung der Höhe: Die Höhe ist gleich dem Abstand des Punktes D zur Ebene E_1.

$$d = \left|\left(\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_0}\right) \cdot \overrightarrow{n^0}\right| \text{ mit } \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{n^0} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow d = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}(6 - 2 + 5)\right| = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

Das Volumen lässt sich über das Spatprodukt sehr elegant berechnen!

$$V = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|45| = 22{,}5$$

c) E_2 : 5x + 5y – 2z = 28

$\overline{DE}$ liegt in der Ebene, wenn D und E drin liegen → Punktprobe

$5 \cdot 6 + 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 28$ und $5 \cdot 5 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 28$ → Punkte liegen drin

Schnitt der Ebenen: E_1 haben wir bei a) in Parameterdarstellung! Also kann man für diese Ebene die Gleichungen der einzelnen Koordinaten hinschreiben und in die Ebenengleichung für E_2 einsetzen!

$x = 3 - s - 2t$

$y = -2 + 3s + t$

$z = -4 + 5s + 5t \ \rightarrow \ 5(3 - s - 2t) + 5(-2 + 3s + t) - 2(-4 + 5s + 5t) = 28$

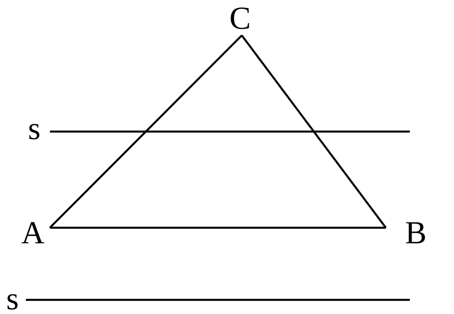
Lösung t = -1

Diesen Parameter in die Gleichung für E_1 einsetzen liefert die gesuchte

Schnittgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lage der Geraden zur Grundfläche: Da der Richtungsvektor der Geraden mit dem ersten Spannvektor der EbeneE_1 in der Parameterdarstellung in a) übereinstimmt, muss die Schnittgerade parallel zu AB laufen.

Jetzt muss man noch zeigen, ob die Grundfläche des Prismas, also das Dreieck ABC durch diese Gerade geschnitten wird.



Gerade durch A und C: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnitt mit Gerade s liefert

$$3-2k = 5-s$$
$$-2+k = -3+3s$$
$$-4+5k = -9+5s$$

Lösung des Gleichungssystems: s = 0 und k = -1

→ Schnittpunkt lautet S(5 | -3 | -9)

→ Da für die Gerade durch A und C der Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$ verwendet wurde und k = -1 auskommt, liegt der errechnete Schnittpunkt nicht auf der Strecke AC!

→ Die Schnittgerade s liegt demnach außerhalb der Grundfläche des Prismas.

d) Gerade durch A und D: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

yz-Ebene: x = 0

Schnitt liefert 0 = 3 + 3t → t = -1 → Schnittpunkt T(0 | -4 | -9)

Teilverhältnis: Siehe TW.S. 40 unten (Teilung einer Strecke)

$$x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \rightarrow 0 = \frac{3+\lambda \cdot 6}{1+\lambda} \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Kann man mit den Koordinaten y und z noch mal zur Probe machen.